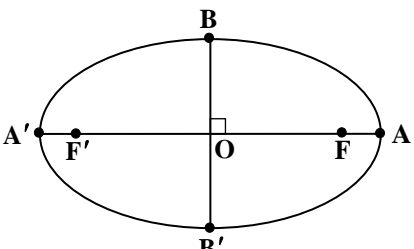
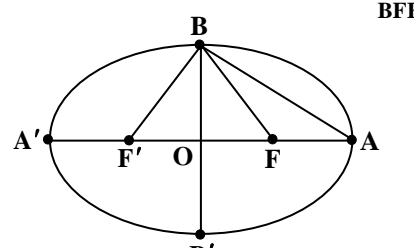
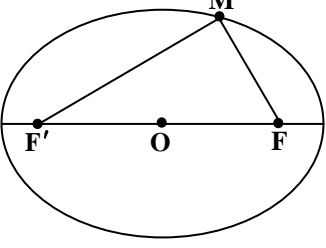
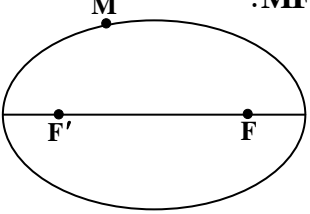
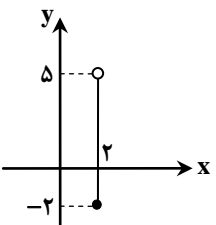


ردیف	نمره	سوال
۱	۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) در بیضی اگر <math>\frac{c}{a}</math> به سمت ۱ نزدیک شود، شکل بیضی کشیده تر شده و شکل آن به پاره خط نزدیک می شود.</p> <p>ب) اگر بدنه داخلی بیضی آینه ای باشد، هر شعاع نوری که از یکی از کانون ها به بدنه بیضی بتابد، بازتابش از کانون دیگر عبور می کند.</p> <p>پ) سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت و یک نقطه ثابت واقع بر آن خط به یک فاصله اند.</p> <p>ت) نقطه <math>A(-2, -4, 0)</math> روی صفحه <math>xOy</math> قرار دارد.</p>
۲	۱	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.</p> <p>الف) در بیضی اگر <math>\frac{c}{a} = 0</math> باشد، بیضی تبدیل به ..... می شود.</p> <p>ب) مجموع فواصل هر نقطه داخل بیضی از دو کانون، از طول قطر بزرگ بیضی، ..... است.</p> <p>پ) هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتابش از ..... خواهد گذشت.</p> <p>ت) در فضای <math>R^3</math> نقطه <math>R(-2, 1, -4)</math> در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.</p>
۳	۲	<p>در هر مورد گزینه درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) در بیضی با طول قطر بزرگ ۱۲ و طول قطر کوچک ۶، فاصله کانونی کدام است؟                  (۱) <math>6\sqrt{3}</math> (۲) <math>2\sqrt{3}</math> (۳) <math>3\sqrt{3}</math> (۴) <math>4\sqrt{3}</math></p> <p>ب) در سهمی به معادله <math>x^2 = -12y</math> مختصات کانون کدام است؟                  (۱) <math>(0, 3)</math> (۲) <math>(0, -3)</math> (۳) <math>(0, 0)</math> (۴) <math>(-3, 0)</math></p> <p>پ) دایره هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله <math>(y-1)^2 = -8(x+1)</math> قرار دارد و از کانون سهمی می گذرند، بر کدام خط مماس هستند؟                  (۱) <math>y=1</math> (۲) <math>y=-1</math> (۳) <math>x=-1</math> (۴) <math>x=1</math></p> <p>ت) معادله صفحه ای که موازی صفحه <math>yOz</math> است و از نقطه <math>(2, -1, 3)</math> می گذرد، کدام است؟                  (۱) <math>x=2</math> (۲) <math>y=-1</math> (۳) <math>z=3</math> (۴) <math>\begin{cases} y=-1 \\ z=3 \end{cases}</math></p>
۴	۱/۵	<p>در بیضی شکل زیر اگر اندازه های <math>OA</math>، <math>OB</math> و <math>OF</math> به ترتیب <math>a</math>، <math>b</math> و <math>c</math> باشد، ثابت کنید: <math>a^2 = b^2 + c^2</math>.</p> 
۵	۱	<p>در بیضی شکل زیر به مرکز <math>O</math> و کانون های <math>F</math> و <math>F'</math>، اگر داشته باشیم <math>S_{\triangle BFF'} = \frac{3}{2} S_{\triangle OAB}</math>، آن گاه خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.</p> 

ردیف	نمره	سوال
۶	۱/۵	<p>مطابق شکل، نقطه <math>M</math> روی بیضی به کانون های <math>F</math> و <math>F'</math> و افطار <math>۶</math> و <math>۱۰</math> قرار دارد. اگر <math>OM = ۴</math> باشد:</p> <p>الف) ثابت کنید مثلث <math>MFF'</math> قائم الزاویه است.</p> <p>ب) اندازه <math>MF</math> را به دست آورید. (<math>MF &lt; MF'</math>)</p> 
۷	۱/۵	<p>مطابق شکل در بیضی به کانون های <math>F</math> و <math>F'</math>، خط <math>d</math> را طوری رسم می کنیم که در نقطه <math>M</math> بر بیضی مماس باشد. اگر از کانون <math>F</math> خطی موازی <math>MF'</math> رسم کنیم تا خط <math>d</math> را در نقطه <math>N</math> قطع نماید، ثابت کنید <math>MF = NF</math>.</p> 
۸	۱/۵	<p>در سهمی به رأس <math>S(۲, ۳)</math> و خط هادی به معادله <math>y = ۷</math>؛</p> <p>الف) مختصات کانون سهمی را به دست آورید.</p> <p>ب) معادله سهمی را بنویسید.</p>
۹	۱	<p>فاصله کانونی یک دیش مخابراتی به شکل سهمی را طوری بیابید که دهانه آن دایره ای به قطر <math>۶۰</math> سانتی متر و عمق آن <math>۹</math> سانتی متر باشد.</p>
۱۰	۱/۵	<p>اگر یک شعاع نورانی در امتداد خط <math>y = ۴</math> بر سهمی <math>y^2 = ۸x</math> بتابد، معادله خط بازتاب را بنویسید.</p>
۱۱	۱/۵	<p>در سهمی به معادله <math>y^2 - 2y - 4x + 9 = 0</math>، مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی را به دست آورده و نمودار سهمی را رسم کنید.</p>
۱۲	۱	<p>به موارد زیر پاسخ دهید:</p> <p>الف) نمودار رابطه <math>\begin{cases} y \geq x^2 \\ y &lt; 3 \end{cases}</math> را رسم کنید.</p> <p>ب) معادله مربوط به نمودار مقابل را بنویسید.</p> 
۱۳	۱	<p>به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید.</p> <p>الف) در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}</math> کدام محور را نمایش می دهد؟</p> <p>ب) معادله صفحه ای که بر محور <math>z</math> در نقطه <math>A(0, 0, 5)</math> عمود باشد، چیست؟</p> <p>پ) در فضای سه بعدی، صفحه به معادله <math>y = -5</math> موازی کدام صفحه مختصات است؟</p> <p>ت) خط به معادله <math>\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}</math> بر کدام صفحه مختصات عمود است؟</p>

ردیف	نمره	
۱۴	۱/۵	<p>با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) معادله کدام وجه به صورت <math>\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ y = 5 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}</math> است؟</p> <p>ب) معادلات مربوط به یال <math>AD</math> را بنویسید.</p> <p>پ) مختصات نقطه <math>D</math> را بنویسید.</p> <p>ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که به موازات صفحه <math>xOy</math> بوده و مکعب مستطیل را نصف کند.</p>
۱۵	۱/۵	<p>به موارد زیر پاسخ دهید:</p> <p>الف) در فضای <math>R^3</math>، نقطه <math>A</math> به طول ۴ روی محور <math>x</math>ها، نقطه <math>B</math> به عرض <math>-2</math> و ارتفاع ۲ روی صفحه <math>yOz</math> و نقطه <math>C</math> به مختصات <math>(-1, 0, 2)</math> مفروض‌اند. اگر نقطه <math>M</math> وسط پاره خط <math>AB</math> باشد، اندازه پاره خط <math>CM</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) اگر <math>\vec{a} = (-2, 2, 3)</math> و <math>\vec{b} = (3, -1, 4)</math> باشد، اندازه بردار <math>3\vec{a} - 2\vec{b}</math> را بیابید.</p>

ویژه پایه دوازدهم

اسفند ۱۴۰۳

گزینهدو

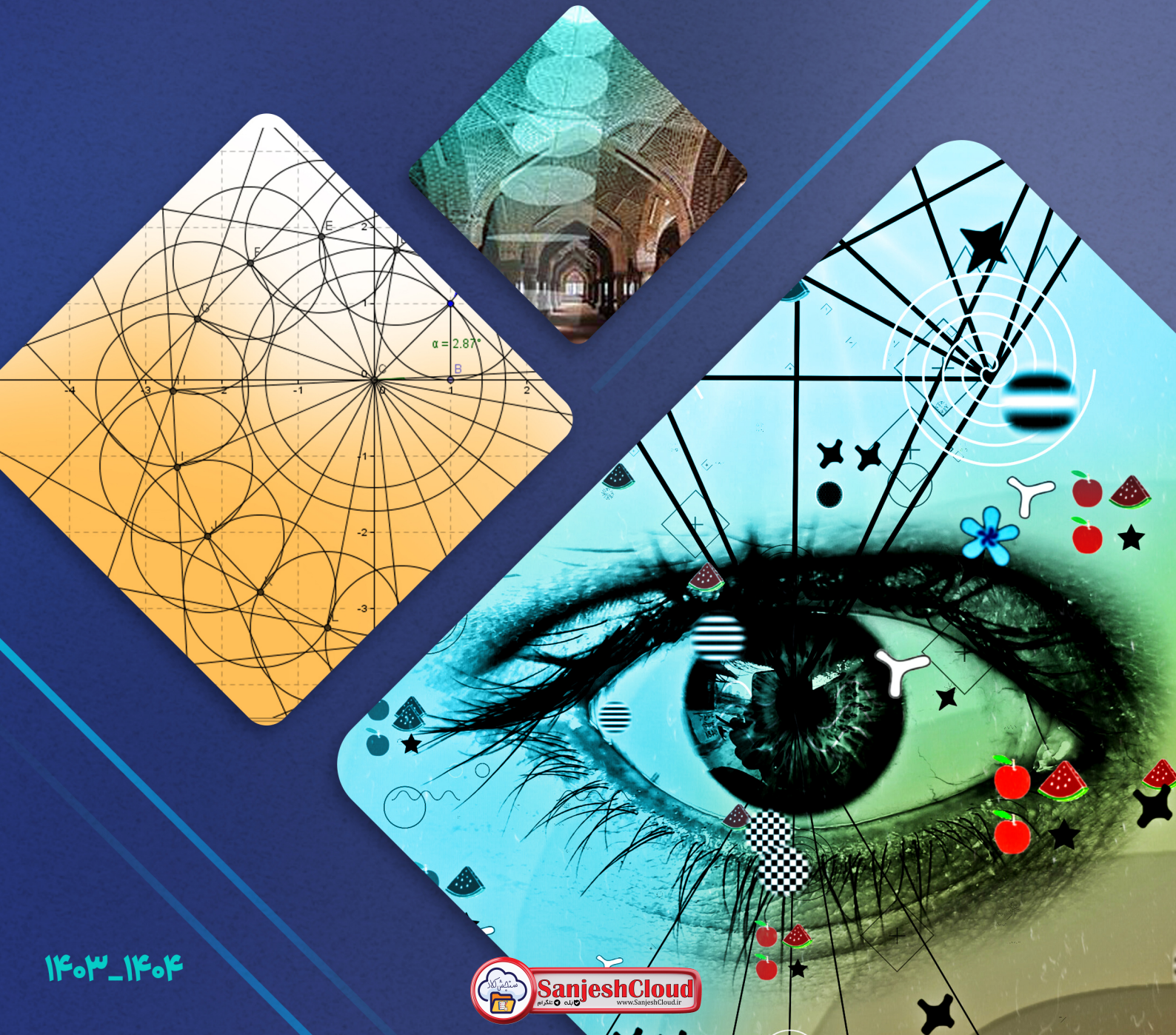


مؤسسه آموزشی فرهنگی

# دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۳

هندسه ۳ (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۳\_۱۴۰۴



-۱

الف) درست

ب) درست

پ) نادرست؛ زیرا سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط و یک نقطه غیرواقع بر آن خط به یک فاصله‌اند.

ت) درست

-۲

الف) دایره

ب) کمتر

پ) کانون

ت) ۶

-۳

الف) گزینه ۱؛ زیرا:

$$\left. \begin{aligned} 2a = 12 &\Rightarrow a = 6 \\ 2b = 6 &\Rightarrow b = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow c = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow 2c = 6\sqrt{3}$$

ب) گزینه ۲؛ زیرا اولاً سهمی قائم رو به پایین است به مرکز مبدأ مختصات. ثانیاً

$$4a = 12 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow F(0, -3)$$

پ) گزینه ۴؛ زیرا مرکز دایره که روی یک سهمی قرار دارند و از کانون آن سهمی می‌گذرند بر خط هادی آن سهمی مماس‌اند. پس معادله خط

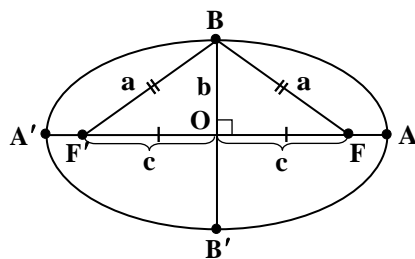
$$\text{هادی سهمی به معادله } (y-1)^2 = -8(x+1) \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$S(-1, 1), 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{سهمی افقی رو به چپ, } x = 1$$

ت) گزینه ۱؛ زیرا صفحه موازی با صفحه  $YOz$  بر محور  $x$  عمود است، پس از آنجایی که از نقطه  $(2, -1, 3)$  می‌گذرد معادله آن به صورت

$$x = 2 \text{ است.}$$

-۴



نقطه  $B$  روی عمودمنصف پاره خط  $FF'$  قرار دارد، پس  $BF = BF'$ .

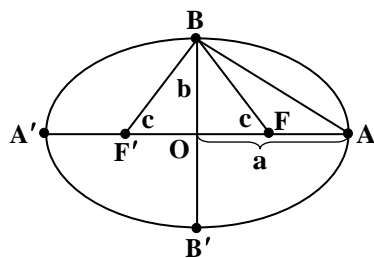
از طرفی با توجه به تعریف بیضی که داریم:  $BF + BF' = 2a$  نتیجه می‌گیریم که:

$$BF = BF' = a$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث  $OBF$  خواهیم داشت:

$$BF^2 = OB^2 + OF^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

-۵



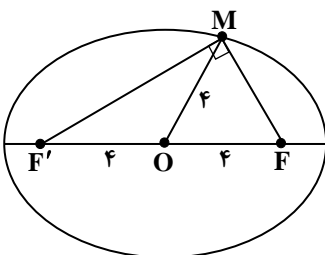
نکته: خروج از مرکز هر بیضی با طول قطر بزرگ  $2a$  و اندازه فاصله کانونی  $2c$  برابر  $\frac{c}{a}$  است.

با توجه به شکل و اطلاعات مسأله، داریم:

$$\frac{S_{\triangle BFF'}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} FF' \times BO}{\frac{1}{2} OA \times BO} = \frac{\frac{1}{2} \times 2c \times b}{\frac{1}{2} \times a \times b} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{4}$$

-۶

الف)



$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow OF = OF' = OM = 4$$

از آنجایی که در مثلث  $MFF'$  میانه وارد بر ضلع بزرگ‌تر، نصف آن ضلع است، پس  $MFF'$

در رأس  $M$  قائم‌الزاویه است.

ب) به کمک ویژگی نقاط روی بیضی و قضیه فیثاغورس، داریم:

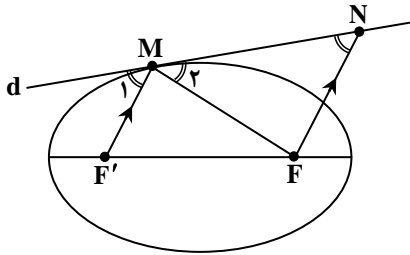
$$MF + MF' = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF$$

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 64 \Rightarrow MF^2 - 10MF + 18 = 0 \xrightarrow{MF < MF'} MF = \frac{10 - \sqrt{28}}{2} = 5 - \sqrt{7}$$



-۷

اولاً با توجه به اینکه  $d$  در  $M$  بر بیضی مماس است، پس  $MF + MF'$  کوتاه‌ترین مسیر است و طبق مسأله هرون داریم:



$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

از طرفی با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب، داریم:

$$MF' \parallel NF, \text{ مورب } d \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N} \quad (2)$$

و از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$\hat{M}_2 = \hat{N} \Rightarrow \triangle FMN \Rightarrow MF = NF$$

-۸

الف) از آنجایی که خط هادی موازی محور  $x$  هاست و بالاتر از رأس نیز قرار دارد، پس سهمی قائم رو به پایین است. از طرفی فاصله رأس تا خط هادی برابر فاصله کانونی است، پس:  $a = 7 - 3 = 4$

$$F(2, 3-4), \quad F(2, -1)$$

و می‌دانیم که کانون به اندازه  $a$  پایین‌تر از رأس سهمی است، پس:

ب) می‌دانیم که معادله سهمی قائم رو به پایین به رأس  $S(h, k)$  به صورت زیر است:

$$(x-h)^2 = -4a(y-k) \xrightarrow[h=2, k=3]{a=4} (x-2)^2 = -16(y-3)$$

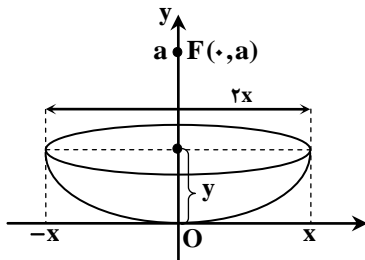
-۹

مطابق شکل، معادله دیش سهموی به قطر دهانه  $2x$  و عمق  $y$  با فاصله کانونی  $a$  عبارت است از:

$$x^2 = 4ay$$

با جای گذاری اطلاعات مسأله در معادله دیش، خواهیم داشت:

$$a = \frac{x^2}{4y} = \frac{(3)^2}{4(9)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$



-۱۰

نکته: معادله سهمی افقی به رأس مبدأ مختصات و فاصله کانونی  $a$  که دهانه آن روبه راست است به صورت  $y^2 = 4ax$  می‌باشد که مختصات کانون آن  $F(a, 0)$  و معادله خط هادی آن  $x = a$  است.

سهمی  $y^2 = 8x$  یک سهمی افقی است که هر شعاع نوری که به موازات محور  $x$  بتابد، بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد. پس با توجه به شکل، داریم:

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$S(0, 0), \quad F(2, 0)$$

برای محل برخورد شعاع نورانی و سهمی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} y = 4 \\ y^2 = 8x \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 = 8x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 4)$$

معادله خطی که از نقاط  $A$  و  $F$  می‌گذرد عبارت است از:

-۱۱

$$(y^2 - 2y + 1) = 4x - 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 4(x-2)$$

ابتدا معادله سهمی را به حالت متعارف (استاندارد) تبدیل می‌کنیم:

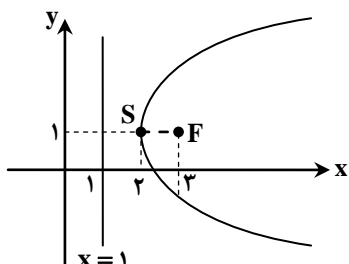
نکته: معادله سهمی افقی یا قائم با رأس  $S(h, k)$  به صورت زیر است.

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(a+h, k)$	$x = -a+h$	خط $y = k$	روبه راست

مختصات رأس:  $S(2, 1)$

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{مختصات کانون: } F(3, 1) \\ \text{معادله خط هادی: } x = 1 \end{array} \right.$$

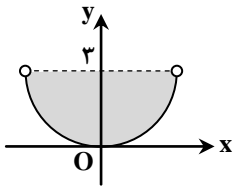
سپس با توجه به اجزای سهمی، آن را رسم می‌کنیم:





-۱۲

(الف)



(ب)

$$\begin{cases} x = 2 \\ -2 \leq y < 5 \end{cases}$$

-۱۳

(الف) محور yها

(ت) صفحه xOy

(پ) صفحه xOz

(ب)  $z = 5$

-۱۴

(الف) CDFG

$$\begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ z = 4 \end{cases}$$

(پ)  $D(3, 5, 4)$

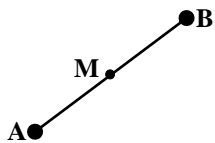
(ت)  $z = 2$

-۱۵

(الف)

$$A(4, 0, 0), B(0, -2, 2), C(-1, 0, 2)$$

نکته: اگر  $A = (x_1, y_1, z_1)$  و  $B = (x_2, y_2, z_2)$  مفروض باشند، مختصات نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  از رابطه زیر به دست می آید.



$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z_M = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2, -1, 1)$$

نکته: فاصله دو نقطه دلخواه از  $R^3$  مانند  $P = (x_1, y_1, z_1)$  و  $Q = (x_2, y_2, z_2)$  به صورت زیر به دست می آید.

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$CM = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

(ب)

نکته: برای هر عدد حقیقی  $r$  حاصل ضرب  $r$  در بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(-2, 2, 2) - 2(2, -1, 4) = (-12, 8, 1)$$

نکته: طول هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  در  $R^3$  از رابطه زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{144 + 64 + 1} = \sqrt{209}$$